

重力加速度的测量

实验方案设计

李毅 PB22051031

2023 年 3 月 24 日

1. 实验原理

理想的单摆，是一根没有质量、没有弹性的线，系住一个没有体积的质点，在真空中由于重力作用而在与地面垂直的平面内做摆角趋于零的自由振动。这种理想的单摆，实际上是不存在的。在实际的单摆实验中，悬线是一根有质量（弹性很小）的线，摆球是有质量有体积的刚性小球，摆角不为零，摆球的运动还受到空气阻力的影响。

考虑了所有影响因素单摆的周期公式为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left[1 + \frac{d^2}{20l^2} - \frac{m_0}{12m} \left(1 + \frac{d}{2l} + \frac{m_0}{m} \right) + \frac{\rho_0}{2\rho} + \frac{\theta^2}{16} \right]}$$

式中 T 是单摆的周期， l 、 m_0 是单摆摆线的长度和质量， d 、 m 、 ρ 是摆球的直径、质量和密度， ρ_0 是空气密度， θ 是摆角。一般情况下，摆球几何形状、摆的质量、空气浮力、摆角 ($\theta < 5^\circ$) 对 T 的修正都小于 10^{-3} 。

本实验采取一级近似，即使线的质量 \ll 小球的质量，球的直径 \ll 线的长度，忽略空气阻力、浮力、线的伸长，以小摆角 ($< 5^\circ$) 作简谐振动，此时单摆的周期公式简化为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

通过测量周期 T 、摆长 l 可求出重力加速度 g 。

2. 不确定度分析

根据单摆周期公式，可得重力加速度公式为：

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \quad (1)$$

由不确定度算数合成公式得到：

$$\frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta L}{L} \quad (2)$$

因为测量精度要求 $\frac{\Delta g}{g} < 1\%$ ，由不确定度均分原理，得：

$$\frac{\Delta T}{T} < 0.25\% \quad (3)$$

$$\frac{\Delta L}{L} < 0.5\% \quad (4)$$

因为实际摆长计算公式为 $L = L_{\text{线}} + \frac{d_{\text{球}}}{2}$ ，实际实验中无法做到 $d_{\text{球}} \ll L_{\text{线}}$ ，所以为了尽可能的减少误差，需要用游标卡尺测量小球的直径，考虑到本实验中摆长 $L \approx 70\text{cm}$ ，故采用钢卷尺测量摆长。

由不确定度算数合成公式有：

$$\Delta L = \Delta L_{\text{线}} + \Delta d_{\text{球}} \quad (5)$$

根据提供的最大允差，钢卷尺 $\Delta_{\text{尺}} \approx 0.2\text{cm}$ ，游标卡尺 $\Delta_{\text{卡}} \approx 0.002\text{cm}$ ，联立 (3)(4)(5) 解得

$$L_{\min} = 40.4\text{cm}$$

易得， L 越大， $\frac{\Delta L}{L}$ 越小，故可以通过增加摆长提高实验精度

由

$$T = \frac{t_{\text{总}}}{N} \quad (N \text{ 为周期个数}) \quad (6)$$

和不确定度算数合成公式得到

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t_{\text{总}}}{t_{\text{总}}} \quad (7)$$

根据提供的最大允差， $\Delta t_{\text{总}} = \Delta_{\text{人}} + \Delta_{\text{秒}} = 0.21\text{s}$ 联立 (2)(6)(7)，代入解得

$$t_{\min} = 84\text{s}$$

因为在本实验中, $L \approx 70\text{cm}$, 故 $T \approx 1.67\text{s}$, 代入 (6) 算得

$$n_{min} = 50$$

易得, n 越大, $\frac{\Delta T}{T}$ 越小, 故可以通过多测单摆周期个数提高实验精度