

重力加速度的测量

实验报告

PB22051031 李毅

PHYS1008B.02

教室：一教 1413 座位号：4

2023 年 4 月 2 日

第一部分 背景介绍

重力加速度 g 是指一个物体受重力作用时具有的加速度，也称自由落体加速度。

地球上质量为 m 的物体受到万有引力 $F_{引}$ 作用，由于地球自转， $F_{引}$ 的一部分用于提供重力，另一部分用于提供向心力 $F_{向}$ ：

$$F_{向} = ma_{向} = m\omega^2(R + h) \cdot \cos\theta$$

式中地球平均半径 $R = 6370km$ ， h 为物体所处的海拔高度， θ 为纬度。

重力加速度 g 与物体所处的纬度、海拔高度及附近的矿藏分布等因素有关，并相继为实验所证实。纬度越大，重力加速度 g 越大，海拔越高， g 越小，但最大和最小值相差仅约 1/300。

由于地球不是完整的球形，精确测量重力加速度，特别是研究重力加速度的分布，在勘查地下资源、提高导弹和卫星精度等应用领域具有十分重要的意义。

第二部分 自由落体法测重力加速度

1. 实验原理

仅在重力作用下，物体由静止开始竖直下落的运动称为自由落体运动。本实验利用自由落体测量本地的重力加速度 g 。

根据牛顿运动定律，自由落体的运动方程为：

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

其中 h 是下落距离， t 是下落时间。但在实际工作中， t 的测量精度不高，利用上式很难精确测量重力加速度 g 。

本实验用卷尺测 h ，采用双光电门法测 t ，其原理见图 1。光电门 1 的位置固定，即小球通过光电门 1 时的速度 v_0 保持不变，小球通过光电门 1 与光电门 2 的高度差为 h_i ，时间差为 t_i ，

改变光电门 2 的位置, 测得 n 组 h_i, t_i , 则有:

$$h_i = v_0 t_i + \frac{1}{2} g t_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

两边同除以 t_i , 得:

$$\frac{h_i}{t_i} = v_0 + \frac{1}{2} g t_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

测出系列 h_i, t_i , 利用线性拟合即可求出当地的重力加速度 g 。

2. 实验装置

实验器材

数字毫秒计, 小球, 电磁铁, 光电门, 卷尺, 立柱, 底座, 铅锤线, 装有餐巾纸的纸杯

说明

自由落体实验装置见图 1, 底座调节螺栓用于调节竖直, 立柱上端有一电磁铁, 用于吸住小钢球。电磁铁一旦断电, 小球即作自由落体运动。由于电磁铁有剩磁, 因此小球下落的初始时间不准确 (最大不确定度约 20ms)。立柱上装有两个可上下移动的光电门, 其位置可利用卷尺测量。数字毫秒计显示 3 个值, 分别对应: 从电磁铁断电到小球通过光电门 1 的时间差、从电磁铁断电到小球通过光电门 2 的时间差、小球通过两个光电门的时间差, 单位为 ms。

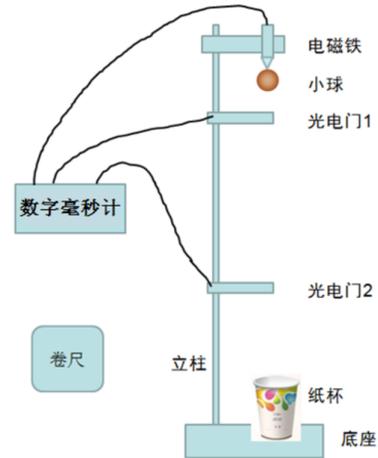


图 1. 自由落体法测重力加速度实验装置

3. 实验步骤

- (1) 调节底座, 使立柱铅垂
- (2) 保持光电门 1 位置不变, 调节光电门 2 位置, 使用卷尺测量光电门 1 与光电门 2 之间的距离 h 并记录
- (3) 打开数字毫秒计, 重置后, 将小球吸附在电磁铁上, 待小球稳定后, 按下数字毫秒计上启动按钮, 读取并记录小球通过两个光电门的时间差 t 。
- (4) 重复步骤 (2)-(3) 8 次, 记录 8 组数据
- (5) 整理实验装置, 并打乱底座平衡

4. 数据分析

(1) 测量记录

h/cm	30.05	34.75	39.85	45.04	49.89	54.85	25.12	19.95
t/ms	111.4	125.9	140.7	155.2	168.1	181.3	96.0	78.8
$h \cdot t^{-1}/(cm \cdot ms^{-1})$	0.2697	0.2760	0.2832	0.2902	0.2968	0.3025	0.2617	0.2532

表 1. 实验原始数据

(2) 数据处理

将实验原始数据的量纲全部转换为国际单位制的基本单位，描出散点图，如图 2，并使用最小二乘法拟合得到

$$\frac{h}{t} = 4.8153 t + 2.1552$$

由公式 (2) 即得到 $\bar{g} = 9.6306 \text{ m/s}^2$

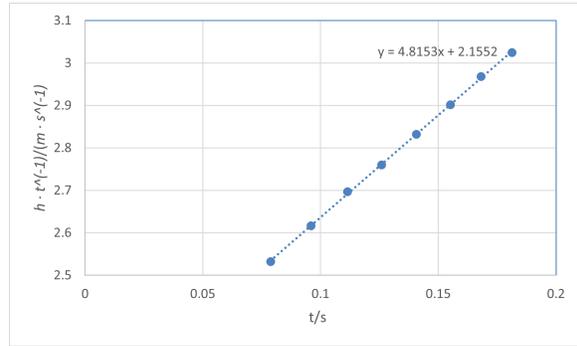


图 2. 实验数据处理

线性拟合的相关系数

$$r = \frac{\overline{t(\frac{h}{t})} - \bar{t} \cdot \overline{(\frac{h}{t})}}{\sqrt{(\overline{t^2} - \bar{t}^2) \left(\overline{(\frac{h}{t})^2} - (\overline{(\frac{h}{t})})^2 \right)}} = 0.9998$$

斜率标准不确定度为

$$U_m = |m| \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) / (n - 2)} = 0.03360 \text{ m/s}^2$$

截距标准不确定度为

$$U_b = s_m \cdot \sqrt{\bar{t}^2} = 0.004581 \text{ m/s}$$

取置信概率 $p=0.95$ ，查表得 $t_p = 2.447$

$$\text{故 } U_g = 2t_p U_m = 0.1644 \text{ m/s}^2$$

最终结果为

$$g = \bar{g} \pm U_g = (9.6306 \pm 0.1644) \text{ m/s}^2$$

5. 误差分析

本实验测得的重力加速度 g 值偏小，可能的原因是受到了下落时空气阻力的影响

6. 思考题

6.1. 在实际工作中，为什么利用 (1) 式很难精确测量重力加速度 g ?

答：由 (1) 式与不确定度算数合成公式得到：

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta h}{h} + 2 \frac{\Delta t}{t} \quad (3)$$

由于下落时间 t 较短 ($100 \sim 200 \text{ ms}$)，而 Δt 只与数字毫秒器的仪器不确定度有关，由于电磁铁有剩磁，因此小球下落的初始时间不准确（最大不确定度约 20 ms ）， $\frac{\Delta t}{t} = 10\% \sim 20\%$ ，同时下落速度较快，受空气阻力影响较大，故很难精确测量重力加速度 g 。

6.2. 为了提高测量精度，光电门 1 和光电门 2 的位置应如何选取？

答：光电门 1 位置应该固定，并且靠近电磁铁，以降低小球初速度，减少空气阻力影响，光电门 2 与光电门 1 的位置差应该尽量包含大的范围以保证绘图精确性，同时该长度不应过小，以

至于 t 过小使得 $\frac{\Delta t}{t}$ 增大，降低实验精度，同时长度不应过大，以降低通过光电门 2 的速度，减少空气阻力影响。

6.3. 利用本实验装置，你还能提出其他测量重力加速度 g 的实验方案吗？

答：

第三部分 单摆法测量重力加速度

1. 实验原理

理想的单摆，是一根没有质量、没有弹性的线，系住一个没有体积的质点，在真空中由于重力作用而在与地面垂直的平面内做摆角趋于零的自由振动。这种理想的单摆，实际上是不存在的。在实际的单摆实验中，悬线是一根有质量（弹性很小）的线，摆球是有质量有体积的刚性小球，摆角不为零，摆球的运动还受到空气阻力的影响。

考虑了所有影响因素单摆的周期公式为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left[1 + \frac{d^2}{20l^2} - \frac{m_0}{12m} \left(1 + \frac{d}{2l} + \frac{m_0}{m} \right) + \frac{\rho_0}{2\rho} + \frac{\theta^2}{16} \right]}$$

式中 T 是单摆的周期， l 、 m_0 是单摆摆线的长度和质量， d 、 m 、 ρ 是摆球的直径、质量和密度， ρ_0 是空气密度， θ 是摆角。一般情况下，摆球几何形状、摆的质量、空气浮力、摆角 ($\theta < 5^\circ$) 对 T 的修正都小于 10^{-3} 。

本实验采取一级近似，即使线的质量 \ll 小球的质量，球的直径 \ll 线的长度，忽略空气阻力、浮力、线的伸长，以小摆角 ($< 5^\circ$) 作简谐振动，此时单摆的周期公式简化为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4)$$

通过测量周期 T 、摆长 l 可求出重力加速度 g 。

2. 实验装置

实验器材

卷尺、电子秒表、单摆（带标尺、平面镜，摆线长度可调）。

说明

单摆法测重力加速度实验装置见图 3，立柱底座的调节螺栓用于调节竖直，使用平面镜便于观察细线的位置，开始实验前，应调节螺栓使立柱竖直，并调节标尺高度，使其上沿中点距悬挂点 50cm。

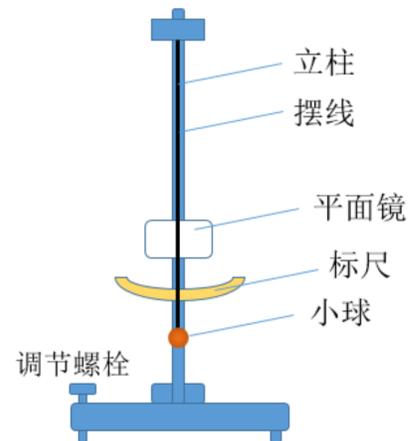


图 3. 单摆法测量重力加速度实验装置

3. 方案设计

根据单摆周期公式，可得重力加速度公式为：

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \quad (5)$$

由不确定度算数合成公式得到：

$$\frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta L}{L} \quad (6)$$

因为测量精度要求 $\frac{\Delta g}{g} < 1\%$ ，由不确定度均分原理，得：

$$\frac{\Delta T}{T} < 0.25\% \quad (7)$$

$$\frac{\Delta L}{L} < 0.5\% \quad (8)$$

根据提供的最大允差，钢卷尺 $\Delta_{尺} \approx 0.2cm$ ，代入 (8) 解得

$$L_{min} = 40cm$$

本实验中摆长 l 取 $\approx 70cm$ ，故使用钢卷尺即可满足实验需求，为使实验更加经济，不使用游标卡尺测量小球直径。

显然， L 越大， $\frac{\Delta L}{L}$ 越小，故可以通过增加摆长提高实验精度

由

$$T = \frac{t_{总}}{N} \quad (N \text{ 为周期个数}) \quad (9)$$

和不确定度算数合成公式得到

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t_{总}}{t_{总}} \quad (10)$$

根据提供的最大允差， $\Delta t_{总} = \Delta_{人} + \Delta_{秒} = 0.21s$ 联立 (7)(9)(10)，代入解得

$$t_{min} = 84s$$

。

因为在本实验中， $L \approx 70cm$ ，故 $T \approx 1.67s$ ，代入 (9) 算得

$$n_{min} = 50$$

。

易得， n 越大， $\frac{\Delta T}{T}$ 越小，故可以通过多测单摆周期个数提高实验精度。

4. 实验步骤

- (1) 调节底座，使立柱铅垂
- (2) 调节绳长，并用钢卷尺测出摆长 l
- (3) 待小球稳定后，将小球移开一定摆角 ($2-3^\circ$)，并记录小球摆动 50 个周期的总用时 t
- (4) 重复步骤 (3) 3 次，记录 3 组数据
- (5) 整理实验装置，并打乱支架平衡、标尺及平面镜位置。

5. 数据分析

(1) 测量记录

l/cm	68.80	68.86	68.85
$t_{\text{总}}/s$	83.20	83.11	83.26
T/s	1.6640	1.6622	1.6652

表 2. 实验原始数据

(2) 数据处理

摆线长度 l 的平均值

$$\bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{68.86 + 68.86 + 68.85}{3} \text{ cm} = 68.857 \text{ cm}$$

摆线长度 l 的标准差

$$\begin{aligned} \sigma_l &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(68.86 - 68.857)^2 + (68.86 - 68.857)^2 + (68.85 - 68.857)^2}{3-1}} \text{ cm} \\ &= 0.0057735 \text{ cm} \end{aligned}$$

摆线长度 l 的 B 类不确定度

$$\Delta_{B,l} = \sqrt{\Delta_{\text{仪}}^2 + \Delta_{\text{估}}^2} = \sqrt{0.2^2 + 0.05^2} \text{ cm} = 0.20616 \text{ cm}$$

摆线长度 l 的展伸不确定度

$$\begin{aligned} U_{l,P} &= \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_l}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_{B,l}}{C}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(4.3 \times \frac{0.0057735}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1.96 \times \frac{0.20616}{3}\right)^2} \text{ cm} \\ &= 0.13545 \text{ cm}, P = 0.95 \end{aligned}$$

周期 T 的平均值

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1.664 + 1.6622 + 1.6652}{3} \text{ s} = 1.6638 \text{ s}$$

周期 T 的标准差

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(1.664 - 1.6638)^2 + (1.6622 - 1.6638)^2 + (1.6652 - 1.6638)^2}{3-1}} \text{ s} \\ &= 0.00151 \text{ s} \end{aligned}$$

周期 T 的 B 类不确定度

$$\Delta_{B,T} = \sqrt{\left(\frac{\Delta_{\text{估}}}{50}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{\text{估}}}{50}\right)^2} = \sqrt{0.0002^2 + 0.004^2} \text{ s} = 0.004005 \text{ s}$$

周期 T 的展伸不确定度

$$\begin{aligned} U_{T,P} &= \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_T}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_{B,T}}{C}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(4.3 \times \frac{0.00151}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1.96 \times \frac{0.004005}{3}\right)^2} \text{ s} \\ &= 4.5715 \times 10^{-3} \text{ s}, P = 0.95 \end{aligned}$$

重力加速度 g

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4 \times \pi^2 \times 0.68857}{1.6638^2} \text{ m/s}^2 = 9.8198 \text{ m/s}^2$$

由 (6), 重力加速度 g 的延伸不确定度

$$\begin{aligned} \frac{U_{g,P}}{\bar{g}} &= \sqrt{\left(\frac{U_{L,P}}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{2U_{T,P}}{\bar{T}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{0.13545}{68.837}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 4.5715 \times 10^{-3}}{1.6638}\right)^2} \\ &= 5.8369 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$U_{g,p} = 0.05731 \text{ m/s}^2$$

重力加速度 g 最终结果

$$g = (9.8198 \pm 0.0573) \text{ m/s}^2$$

6. 误差分析

合肥地区重力加速度参考值: $g = 9.795 \text{ m/s}^2$, 计算得 $\frac{\Delta g}{g} < 0.84\% < 1\%$, 故测量结果满足要求精度

7. 思考题

7.1. 分析基本误差的来源, 提出进行改进的方法。

1. 系统误差:

(1) 实验中存在空气阻力。由于存在空气阻力, 小球实际做阻尼振动, 振动幅度会越来越小, T 随之减小, 使最终结果偏大。

(2) 一般情况下, 摆球几何形状、摆的质量、空气浮力、摆角都对单摆的周期有影响。当摆角 $\theta < 5^\circ$ 时, 对 T 的修正都小于 10^{-3} 。在此实验下, 由于实验精度要求, 因此这些修正项有轻微的可以忽略的影响。

2. 随机误差:

(1) 测量摆长时误差大。测量时使用钢卷尺难以保持与摆线紧贴, 难以精确估计小球球心位置。改进: 可使用游标卡尺精确测量。

(2) 测量全振动周期时不准确。使用肉眼确定记时起点与终点，使用默数法记录小球摆动周期数，都可能导致周期不准确。改进：增加实验重复次数。

致谢

感谢中国科学技术大学物理实验教学中心和李婉清老师

参考文献

1. 吴泳华，霍剑青，浦其荣，大学物理实验（第一册第二版），2005 年，高等教育出版社