钢丝切变模量的测量

实验报告

PB22051031 李毅

PHYS1008B.02

教室：一教 1424　座位号：5

2023 年 5 月 22 日

第一部分　实验原理

实验对象是一根上下均匀而细长的钢丝，从几何上说就是一个半径为 R，长度为 L 的细长的圆柱，提供一扭转角，推导得：

$$G = \frac{2ML}{\pi R^4 \phi}$$

其中 G 为切变模量，M 为钢丝的扭矩（即其恢复力矩），ϕ 为转角

为了求 M，在钢丝下端悬挂一圆盘，它可绕中心线自由扭动，成为扭摆。摆扭过的角度 ϕ 正比于所受的扭力矩，即 $M = D\phi, D$ 为金属丝的扭转模量。

同时有 $M = I_0 \frac{d^2\phi}{dt^2}$, 为了精准测量摆的转动惯量 I_0, 将一个金属环对称地置于圆盘上, 设环的质量为 m，内外半径分别为 $r_{内}$ 和 $r_{外}$，即可得到

$$D = \frac{2\pi^2 m(r_{内}^2 + r_{外}^2)}{T_1^2 - T_0^2}$$

$$G = \frac{4\pi L m(r_{内}^2 + r_{外}^2)}{R^4(T_1^2 - T_0^2)}$$

下面根据此公式测量钢丝的切变模量 G 和扭转模量 D

第二部分　实验步骤

1. 装置扭摆，使钢丝与作为扭摆的圆盘面垂直，圆环应能方便地置于圆盘上。
2. 由于钢丝被拉伸多次，故用螺旋测微器测钢丝上，中，下部直径 3 次减少误差，用游标卡尺测环的内外径各 3 次，用米尺测钢丝的有效长度 3 次。
3. 粗测出扭摆的周期。
4. 写出相对误差公式，据此估算应测多少个周期较合适。

5. 采取 $\phi = 120°$ 转角，对放圆环和不放圆环分别测 3 次周期。

6. 计算钢丝的切变模量 G 和扭转模量 D，分析误差。

第三部分　实验数据处理

1. 各器材长度测量

表 1：各器材长度数据表
（螺旋测微器空程为 $D_0 = -0.002mm$）

钢丝直径	上部 D_1/mm 读数	0.778	0.779	0.777
	中部 D_2/mm 读数	0.775	0.778	0.779
	下部 D_3/mm 读数	0.782	0.781	0.782
钢丝长度 L/cm		39.20	39.25	39.20
圆环内直径 $d_{内}/\mathrm{cm}$		8.330	8.332	8.336
圆环内直径 $d_{外}/\mathrm{cm}$		10.390	10.398	10.386

得到钢丝直径 $\bar{D} = 0.779mm + 0.002mm = 0.781mm$，钢丝半径 $\bar{R} = 0.3905mm$，钢丝长度 $\bar{L} = 39.217cm$，圆环内直径 $\bar{d_{内}} = 8.3327cm$，圆环外直径 $\bar{d_{外}} = 10.3913cm$，圆环内半径 $\bar{r_{内}} = 4.1664cm$，圆环外半径 $\bar{r_{外}} = 5.1957cm$。

2. 质量测量

本实验中，实验室给定了金属圆环的质量 $m = 577.7g$。

3. 周期粗测

进行两次粗测（30T），得出未放圆环时周期 T_0 分别为 2.247s，2.220s，放圆环时周期 T_1 分别为 3.598s，3.596s，从而得粗测的 $\bar{T}_0 = 2.2335s$，$\bar{T}_1 = 3.5970s$

4. 测量周期数的确定

由 $G = \dfrac{4\pi Lm(r_{内}^2 + r_{外}^2)}{R^4(T_1^2 - T_0^2)}$ 和相对误差公式可以得出：

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta m}{m} + 4\frac{\Delta R}{R} + 2\frac{r_{内}\Delta r_{内}}{r_{内}^2 + r_{外}^2} + 2\frac{r_{外}\Delta r_{外}}{r_{内}^2 + r_{外}^2} + 2\frac{T_0\Delta T_0}{T_1^2 - T_0^2} + 2\frac{T_1\Delta T_1}{T_1^2 - T_0^2}$$

查阅表格可以得出，$\Delta L = 0.12cm$，$\Delta D = 0.004mm$，$\Delta R = 0.002mm$，$\Delta m = 0.08g$，$\Delta d_{内} = \Delta d_{内} = \Delta d_{外} = 0.002cm$，$\Delta r_{内} = \Delta r_{外} = 0.001cm$

从而计算得到 $\dfrac{\Delta L}{L} = 3.060 \times 10^{-3}$，$\dfrac{\Delta m}{m} = 1.385 \times 10^{-4}$，$4\dfrac{\Delta R}{R} = 2.049 \times 10^{-2}$，$2\dfrac{r_{内}\Delta r_{内}}{r_{内}^2 + r_{外}^2} = 1.879 \times 10^{-4}$，$2\dfrac{r_{外}\Delta r_{外}}{r_{内}^2 + r_{外}^2} = 2.343 \times 10^{-4}$，发现 $4\dfrac{\Delta R}{R}$ 项为主要误差，为了减小误差，与周期有关

的项应通过增大单次计时周期数来减小 ΔT_0，ΔT_1，使之小于主要误差的 $\frac{1}{5}$ 即可，因此得到两个不等式：

$$2\frac{T_0\Delta T_0}{T_1^2-T_0^2}<\frac{1}{5}\cdot\frac{4\Delta R}{R}$$

$$2\frac{T_1\Delta T_1}{T_1^2-T_0^2}<\frac{1}{5}\cdot\frac{4\Delta R}{R}$$

又有 $\Delta T_0=\frac{\Delta t}{n_0}$，$\Delta T_1=\frac{\Delta t}{n_1}$，$\Delta t=\sqrt{\Delta_{人}^2+\Delta_{表}^2}=\sqrt{0.2^2+0.01^2}=0.2s$, 解得：

$$n_0>27.42$$

$$n_1>44.16$$

为计数方便，接下来本实验中每次周期测量均使扭摆摆动 50 个周期。

5. 周期的精确测量

表 2：周期精确测量数据表（50T）

未放圆环 t_0/s	112.75	112.60	112.75	未放圆环 T_0/s	2.255	2.252	2.255
放圆环 t_1/s	182.75	182.92	182.85	放圆环 T_1/s	3.6550	3.6580	3.6570

得到精确的 $\bar{T_0}=2.2540s$，$\bar{T_1}=3.6567s$

6. 扭转模量 D 和切变模量 G 的值

前面计算得到：钢丝半径 $\bar{R}=0.3905mm$，钢丝长度 $\bar{L}=39.217cm$，圆环内半径 $\bar{r_{内}}=4.1664cm$，圆环外半径 $\bar{r_{外}}=5.1957cm$，圆环的质量 $m=577.7g$，放置圆环时周期 $\bar{T_0}=2.2540s$，未放置圆环时周期 $\bar{T_1}=3.6567s$，代入得：

$$\bar{D}=\frac{2\pi^2\bar{m}(\bar{r_{内}}^2+\bar{r_{外}}^2)}{\bar{T_1}^2-\bar{T_0}^2}=6.1005\times10^{-3}Pa$$

$$\bar{G}=\frac{4\pi\bar{L}\bar{m}(\bar{r_{内}}^2+\bar{r_{外}}^2)}{\bar{R}^4(\bar{T_1}^2-\bar{T_0}^2)}=6.5499\times10^{10}Pa$$

7. 不确定度分析

以下误差分析在置信概率 $P=0.95$ 的条件下进行。

由误差分析公式，有：

$$U_D=\bar{D}\sqrt{(\frac{U_m}{\bar{m}})^2+(2\frac{\bar{r_{内}}U_{r_{内}}}{\bar{r_{内}}^2+\bar{r_{外}}^2})^2+(2\frac{\bar{r_{外}}U_{r_{外}}}{\bar{r_{内}}^2+\bar{r_{外}}^2})^2+(2\frac{\bar{T_0}U_{T_0}}{\bar{T_1}^2-\bar{T_0}^2})^2+(2\frac{\bar{T_1}U_{T_1}}{\bar{T_1}^2-\bar{T_0}^2})^2}$$

$$U_G=\bar{G}\sqrt{(\frac{U_L}{\bar{L}})^2+(4\frac{U_R}{\bar{R}})^2+(\frac{U_m}{\bar{m}})^2+(2\frac{\bar{r_{内}}U_{r_{内}}}{\bar{r_{内}}^2+\bar{r_{外}}^2})^2+(2\frac{\bar{r_{外}}U_{r_{外}}}{\bar{r_{内}}^2+\bar{r_{外}}^2})^2+(2\frac{\bar{T_0}U_{T_0}}{\bar{T_1}^2-\bar{T_0}^2})^2+(2\frac{\bar{T_1}U_{T_1}}{\bar{T_1}^2-\bar{T_0}^2})^2}$$

下面分析测定各项

(1)U_L 的计算

首先计算对钢丝长度 3 次测量的标准差：

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}(L_i - \bar{L})^2}{3-1}} = 0.028868cm$$

查阅表格可以得出，$\Delta L = 0.12cm$，其为主要误差，取 $\Delta B = \Delta L = 0.12cm$，有：

$$u_A = \frac{\sigma_L}{\sqrt{3}} = 0.016667cm$$

$$u_B = \frac{\Delta B}{C} = 0.04cm$$

$$U_L = \sqrt{(t_p u_A)^2 + (k_p u_B)^2} = \sqrt{(4.303 \times 0.016667)^2 + (1.96 \times 0.04)} = 0.10622cm$$

(2)U_R 的计算

首先计算对钢丝半径 9 次测量的标准差：

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{9}(R_i - \bar{R})^2}{9-1}} = 0.0011726mm$$

查阅表格可以得出，$\Delta R = 0.002mm$，其为主要误差，取 $\Delta B = \Delta R = 0.002mm$，有：

$$u_A = \frac{\sigma_R}{\sqrt{9}} = 0.00039087mm$$

$$u_B = \frac{\Delta B}{C} = 0.0006667mm$$

$$U_R = \sqrt{(t_p u_A)^2 + (k_p u_B)^2} = \sqrt{(2.306 \times 0.002)^2 + (1.96 \times 0.0006667)} = 0.0015883mm$$

(3)U_m 的计算

根据天平允差，$U_m = 0.08g$

(4)$U_{r_{内}}$ 的计算

$$\sigma_{r_{内}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}(r_{内_i} - \bar{r_{内}})^2}{3-1}} = 0.0015275cm$$

查阅表格可以得出，$\Delta R = 0.001cm$，其为主要误差，取 $\Delta B = \Delta R = 0.001cm$，有：

$$u_A = \frac{\sigma_{r_{内}}}{\sqrt{3}} = 0.0008819cm$$

$$u_B = \frac{\Delta B}{C} = 0.0005774cm$$

$$U_{r_{内}} = \sqrt{(t_p u_A)^2 + (k_p u_B)^2} = \sqrt{(4.303 \times 0.0008819)^2 + (1.96 \times 0.0005774)} = 0.0039575cm$$

(5)$U_{r_外}$ 的计算

$$\sigma_{r_外} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}(r_{外_i} - \bar{r_外})^2}{3-1}} = 0.0030551cm$$

查阅表格可以得出，$\Delta R = 0.001cm$，其为主要误差，取 $\Delta B = \Delta R = 0.001cm$，有：

$$u_A = \frac{\sigma_{r_外}}{\sqrt{3}} = 0.0017639cm$$

$$u_B = \frac{\Delta B}{C} = 0.0005774cm$$

$$U_{r_外} = \sqrt{(t_p u_A)^2 + (k_p u_B)^2} = \sqrt{(4.303 \times 0.0017639)^2 + (1.96 \times 0.0005774)} = 0.0076684cm$$

(6)U_{T_0} 的计算

$$\sigma_{T_0} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}(T_{0_i} - \bar{T_0})^2}{3-1}} = 0.0017321s$$

查阅表格可以得出，取 $\Delta B = \Delta t/50 = 0.004s$，有：

$$u_A = \frac{\sigma_{T_0}}{\sqrt{3}} = 0.0010000s$$

$$u_B = \frac{\Delta B}{C} = 0.0013333s$$

$$U_{T_0} = \sqrt{(t_p u_A)^2 + (k_p u_B)^2} = \sqrt{(4.303 \times 0.0010000)^2 + (1.96 \times 0.0013333)} = 0.0050318s$$

(7)U_{T_1} 的计算

$$\sigma_{T_1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}(T_{1_i} - \bar{T_1})^2}{3-1}} = 0.0015275s$$

查阅表格可以得出，取 $\Delta B = \Delta t/50 = 0.004s$，有：

$$u_A = \frac{\sigma_{T_1}}{\sqrt{3}} = 0.0008819s$$

$$u_B = \frac{\Delta B}{C} = 0.0013333s$$

$$U_{T_1} = \sqrt{(t_p u_A)^2 + (k_p u_B)^2} = \sqrt{(4.303 \times 0.0008819)^2 + (1.96 \times 0.0013333)} = 0.0046055s$$

(8) 最终结果

$$U_D = \bar{D}\sqrt{(\frac{U_m}{\bar{m}})^2 + (2\frac{\bar{r_内}U_{r_内}}{\bar{r_内}^2+\bar{r_外}^2})^2 + (2\frac{\bar{r_外}U_{r_外}}{\bar{r_内}^2+\bar{r_外}^2})^2 + (2\frac{\bar{T_0}U_{T_0}}{\bar{T_1}^2-\bar{T_0}^2})^2 + (2\frac{\bar{T_1}U_{T_1}}{\bar{T_1}^2-\bar{T_0}^2})^2}$$

代入得 $U_D = 3.21588\times10^{-5}Pa$。

最终结果为 $D = \bar{D}\pm U_D = (6.1005\pm0.0322)\times10^{-3}Pa$

相对不确定度为 $0.528\% < 5\%$，满足实验要求。

$$U_G = \bar{G}\sqrt{(\frac{U_L}{\bar{L}})^2 + (4\frac{U_R}{\bar{R}})^2 + (\frac{U_m}{\bar{m}})^2 + (2\frac{\bar{r_内}U_{r_内}}{\bar{r_内}^2+\bar{r_外}^2})^2 + (2\frac{\bar{r_外}U_{r_外}}{\bar{r_内}^2+\bar{r_外}^2})^2 + (2\frac{\bar{T_0}U_{T_0}}{\bar{T_1}^2-\bar{T_0}^2})^2 + (2\frac{\bar{T_1}U_{T_1}}{\bar{T_1}^2-\bar{T_0}^2})^2}$$

代入得 $U_G = 1.13413\times10^9Pa$。

最终结果为 $G = \bar{G}\pm U_G = (6.5499\pm0.1134)\times10^{10}Pa$

相对不确定度为 $1.731\% < 5\%$，满足实验要求。

第四部分　思考题

1. 实验是否满足 $\gamma << 1$ 的条件

本实验采取 $\phi = 120°$ 的转角，此时最大切应变 $\gamma_m = R\frac{\phi}{L} = 1.04\times10^{-3} << 1$, 所以满足条件。

2. 为提高测量精度，本实验在设计上作了哪些安排？在具体测量时又要注意什么？

安排：

1. 通过缜密的分析确定测量的周期数，合理的减少了时间不确定度对整体不确定度的影响
2. 多次测量取平均值，减小了偶然误差的影响

注意事项：

1. 测量时需要通过参照物来确定扭摆平衡位置，以准确数周期
2. 测量时需要尽量避免扭摆前后摆动

致谢

感谢中国科学技术大学物理实验教学中心和陈翔老师